UE 22A

2

Probabilités

Portait de Luca Pacioli © Musée Capodimonte de Naples

Un peu d'histoire

C'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités. Lors de fouilles archéologiques, on a trouvé des indices montrant que les jeux de hasard se pratiquaient déjà 5 000 ans av. J.-C. (on utilisait des osselets). L'un des jeux de la Grèce antique consistait d'ailleurs à lancer quatre osselets ; pour les joueurs, il s'agissait d'obtenir que les quatre faces supérieures soient distinctes. Les premiers dés connus ont été mis à jour à Tepe Gawra, au nord de l'Irak, et datent du troisième millénaire av. J.-C. Le jeu de cartes était également pratiqué dans divers pays depuis des époques reculées. Les cartes actuelles apparurent en France au 14ème siècle et leur utilisation donna très vite lieu à des jeux d'argent.

Le premier écrit que l'on connait sur les probabilités est celui du mathématicien italien Luca **Pacioli** : *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportio et Proportionalita*, publié en 1494. Par la suite, on attribue souvent la réelle naissance des probabilités à la correspondance entre **Fermat** et **Pascal** concernant une querelle de joueurs : le physicien et mathématicien hollandais **Huygens** en prend connaissance et publie un traité sur le sujet en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). **Bernoulli**, **Laplace**… mettent peu à peu un cadre à cette nouvelle branche des mathématiques.

2. Vocabulaire des événements

DÉFINITION : Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine. Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé **éventualité**.

Exemple

- Tirage des six numéros du loto : « obtenir 2 – 5 – 17 – 23 – 36 – 4 » est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- Lancer d'une pièce de monnaie : « obtenir pile » et « obtenir face » sont les deux seules éventualités de l'expérience.

DÉFINITION : Univers

L'ensemble formé par les éventualités est appelé **univers**, souvent noté Ω.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{ pile} ; \text{face }\}$;
- lancer d'un dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

DÉFINITION : Événement

Un **événement** de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers.

Exemple Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

DÉFINITION : Événement impossible, certain

L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'**événement impossible**, noté $\varnothing$, l'événement composé de toutes les éventualités est appelé l'**événement certain**.

Exemple

- « Obtenir un 15 » à la bataille (jeu de cartes) est un événement impossible ;
- Lancer d'un dé à six faces : « obtenir un nombre positif » est un événement certain.

DÉFINITION : Événement contraire

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé **événement contraire** de A, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{\text{ pile }\}$, son événement contraire est $\overline{A} = \{\text{ face }\}$;
- lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 », alors événement contraire $\overline{A}$ est l'événement « obtenir 5 ou 6 ».

Ce qu'il faut savoir

3. Calcul de probabilités

DÉFINITION : Équiprobabilité

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité ; dans ce cas, on a :

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

REMARQUE : dans un exercice, pour signifier que l'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

- on lance un dé **non pipé** ;
- dans une urne, les boules sont **indiscernables** au toucher ;
- on rencontre **au hasard** une personne parmi...

Exemple

On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un diviseur de six ». Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B.

Correction

Le dé est équilibré, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.

- $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$ donc, $\mathcal{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
- $B = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 6 \}$ donc, $\mathcal{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

PROPRIÉTÉ

$\mathcal{P}(\varnothing) = 0$; $\quad 0 \leqslant \mathcal{P}(A) \leqslant 1$; $\quad \mathcal{P}(\Omega) = 1$; $\quad \mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements A et B suivants : A : « obtenir un cavalier » et B : « obtenir un roi ». Déterminer la probabilité des événements A, B et $\overline{B}$.

Correction

Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité.

- $A = \varnothing$ donc, $\mathcal{P}(A) = 0$;
- B ={roi de pique, coeur, carreau, trèfle}. $\mathcal{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$;
- $\overline{B}$: « ne pas obtenir de roi ». $\mathcal{P}(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

4. Arbres : du dénombrement aux probabilités

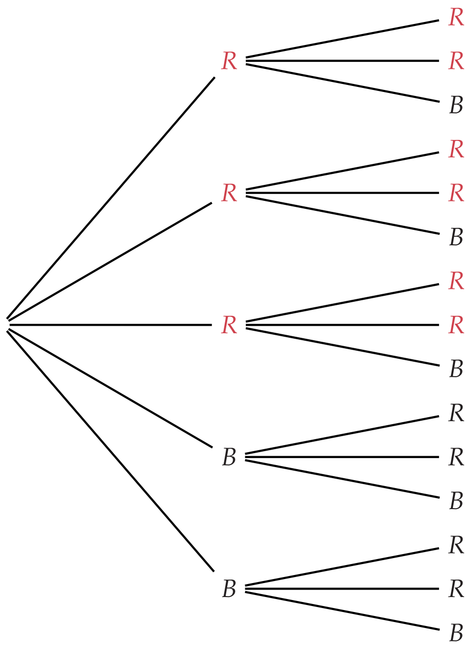
DÉFINITION : Arbre de probabilité

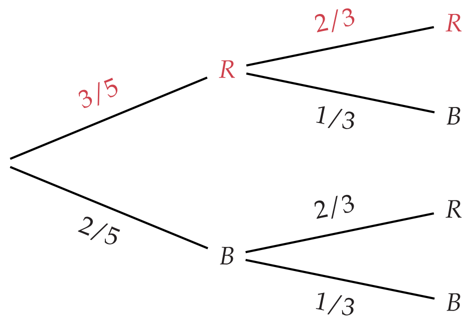
Pour dénombrer ou représenter les différentes issues d'une expérience aléatoire, on peut utiliser un **arbre de probabilités**. Chacune de ses branches représente un événement possible et peut comporter la probabilité de cet événement : il s'agit alors d'un **arbre pondéré**.

Arbre pondéré ou non ?

On considère l'expérience aléatoire suivante : *on dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient trois boules rouges et deux boules blanches. L'urne B contient deux boules rouges et une boule blanche. L'expérience consiste à piocher une boule au hasard dans l'urne A, puis dans l'urne B. On note R l'événement « on tire une boule rouge » et B l'événement « on tire une boule blanche ».*

Cette situation peut-être modélisée par les arbres de probabilité suivants :





L'arbre de gauche est un arbre simple, il a l'avantage de représenter toutes les situations, qui sont alors équiprobables. L'arbre ci-dessus est un arbre pondéré, il a l'avantage de condenser la situation, chaque branche possédant un « poids ».

PROPRIÉTÉ : Probabilité le long d'un arbre

Dans un arbre pondéré, une succession de plusieurs branches est appelée un **chemin**. La probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités le long de ce chemin.

Exemple

On reprend l'exemple précédent et on souhaite déterminer la probabilité de l'événement A : « À l'issue du tirage, on a obtenu deux boules rouges ».

Correction

Le calcul est différent suivant l'arbre utilisé.

- Avec l'arbre simple, on compte le nombre de chemins comportant deux fois l'événement R. Il y a en a 6.
  Or, le nombre de résultats possibles est de 15 (5 fois 3). Les situations étant équiprobables on peut appliquer la formule de probabilité :
  $\mathcal{P} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.
- Avec l'arbre pondéré, il suffit de multiplier le poids des branches de l'unique chemin comportant deux événements R. On trouve
  $\mathcal{P} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{5}$.

Exemple

Avec le même exemple, on souhaite déterminer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

Correction

Cette condition est réalisée lorsqu'on obtient une boule rouge dans l'urne A puis une boule blanche dans l'urne B, ou lorsqu'on obtient une boule blanche dans l'urne A puis une boule rouge dans l'urne B.

Or, $\mathcal{P}(R_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{15}$ et $\mathcal{P}(B_1 \cap R_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$,

donc : $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R_1 \cap B_2) + \mathcal{P}(B_1 \cap R_2) = \dfrac{3}{15} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{7}{15}$.

Vu au CRPE

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
3e	N9	Statistiques et probabilités	2., 3. et 4.

1 Sondage d'un autre millénaire

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1 999 auprès de 2 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40 % des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;
- 35 % des personnes interrogées ont moins de 30 ans, parmi elles, quatre cinquièmes sont intéressées par Internet ;
- 30 % des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85 % ne sont pas intéressées par Internet.

1) Compléter le tableau suivant :

	intéressées par Internet	non intéressées par internet	total
moins de 30 ans			
de 30 à 60 ans			
plus de 60 ans			
total			2 000

2) On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :
   A : « la personne interrogée a moins de 30 ans », B : « la personne interrogée est intéressée par Internet ».
   a) Calculer les probabilités $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$.
   b) Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer $\mathcal{P}(\overline{A})$.
3) On sait que la personne interrogée est intéressée par Internet. Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 30 ans ?

2 CRPE 2012 G1

Dans un sachet opaque, on a mélangé 35 chocolats noirs et 20 chocolats blancs. On suppose que les chocolats sont indiscernables au toucher. On prend au hasard un chocolat dans le sachet.

Vrai ou faux : la probabilité que le chocolat extrait du sachet soit blanc est de $\frac{4}{7}$.

3 CRPE 2013 G2

Aujourd'hui, Martin n'a pas appris sa leçon. Le professeur donne un contrôle dans lequel figure un Q.C.M. qui comporte 3 questions. À chacune des questions, il y a 3 choix possibles dont une seule bonne réponse. Martin répond au hasard à chaque question. Les affirmations suivantes sont-elles vraies :

- Affirmation 1 : la probabilité que toutes les réponses soient justes est $1/27$.
- Affirmation 2 : la probabilité que toutes les réponses soient fausses est $1/3$.

4 CRPE 2014 G1

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé. Le dé est supposé équilibré.

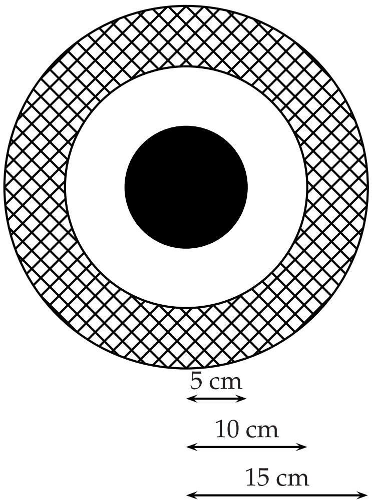
1) On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2. Au 7ème lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?
2) On lance le dé deux fois de suite.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?
   b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

5 CRPE 2014 G2

Albert observe un entraînement au tir à la carabine sur une cible. La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-contre.

Un débutant touche la cible une fois sur deux. Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1) Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?
2) Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?



6 CRPE 2014c G1

Dans une certaine région du monde, on utilise le modèle ci-dessous pour prévoir le temps, en se limitant aux deux cas possibles « le temps est sec » et « le temps est humide » :

- si le temps est sec un jour alors il sera sec le lendemain avec une probabilité de $\frac{5}{6}$;
- si le temps est humide un jour alors il sera humide le lendemain avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

Aujourd'hui, le temps est sec. Vrai ou faux : la probabilité que le temps soit humide après-demain est de 0,25.

7 CRPE 2014c G2 et CRPE 2015 G2

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On calcule la somme des deux numéros obtenus.

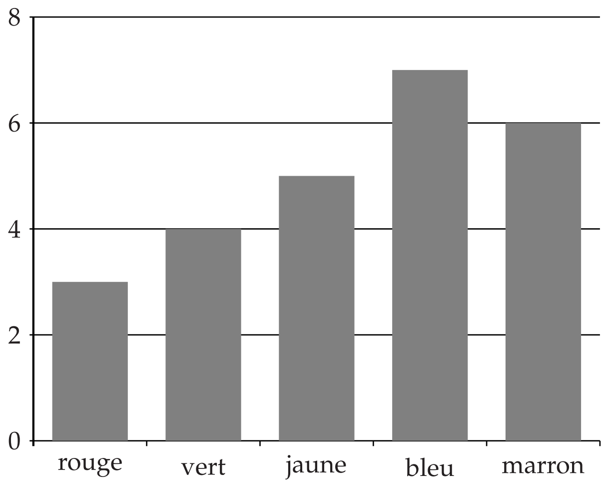
Vrai ou faux : les probabilités d'obtenir un résultat pair ou un résultat impair sont égales.

Vrai ou faux : il a autant de chances d'obtenir une somme égale à 7, qu'une somme égale à 5.

8 CRPE 2016 G1

Une urne contient des boules de couleurs différentes indiscernables au toucher.

Le nombre de boules de chaque couleur dans cette urne est indiqué sur le diagramme ci-dessous :



1) On tire au hasard une boule dans l'urne. On regarde sa couleur et on la remet dans l'urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit bleue ?

2) On souhaite que la probabilité de tirer une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,4.
Combien de boules bleues doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour qu'il en soit ainsi ?

3) On considère à nouveau l'urne dont la composition est donnée par le diagramme ci-dessus.
Combien de boules rouges doit-on ajouter au minimum dans l'urne avant le tirage pour que la probabilité d'obtenir une boule bleue à l'issue d'un tirage au hasard d'une boule soit inférieure ou égale à 0,2 ?

9 CRPE 2017 G1

Au mois de février 2017, on a interrogé 12 527 personnes de plus de 15 ans à la sortie du métro, à propos du nombre de fois où elles sont allées au restaurant pendant le mois de janvier 2017. Chaque personne sondée est enregistrée par un numéro, de 1 à 12 527.
Le tableau ci-dessous présente des résultats, selon la classe d'âge des personnes interrogées.

	De 15 à 25 ans	De 26 à 44 ans	De 45 à 60 ans	Plus de 60 ans	Total
Pas du tout		82	415	147	666
Une fois	682		1243	589	
Deux fois		634	552	138	1737
Trois fois	174	95			1907
Quatre fois ou plus	251	418	923	317	
Total	1542		3517	2445	

1) Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

2) On tire au hasard un des numéros correspondant aux personnes interrogées, en supposant que chacun a la même probabilité d'être choisi.

- **a)** Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui est allée exactement deux fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.
- **b)** Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a moins de 45 ans.
- **c)** Déterminer la probabilité que ce numéro corresponde à une personne qui a plus de 60 ans et qui est allée au moins trois fois au restaurant pendant le mois de janvier 2017.

10 CRPE 2017 G3

Dans cet exercice, les réponses seront données sous la forme d'une fraction irréductible.
On dispose d'un dé cubique à 6 faces numérotées de 1 à 6 et d'un dé tétraédrique à 4 faces avec des sommets numérotés de 1 à 4, parfaitement équilibrés. On lance les deux dés et on note le nombre lisible sur la face supérieure du dé à 6 faces et le nombre lisible sur le sommet supérieur du dé à 4 faces.

1)
- **a)** Avec quel dé la probabilité d'obtenir un 3 est-elle la plus grande ?
- **b)** Avec quel dé la probabilité d'obtenir un multiple de 3 est-elle la plus grande ?
- **c)** Quelle est la probabilité d'obtenir avec le dé à 4 faces un nombre supérieur ou égal au nombre obtenu avec le dé à 6 faces ?

2) On calcule la somme des nombres obtenus avec chacun des deux dés.
- **a)** Quelle est la probabilité d'obtenir une somme paire ?
- **b)** Quelle est la probabilité d'obtenir une somme strictement supérieure à 3 ?