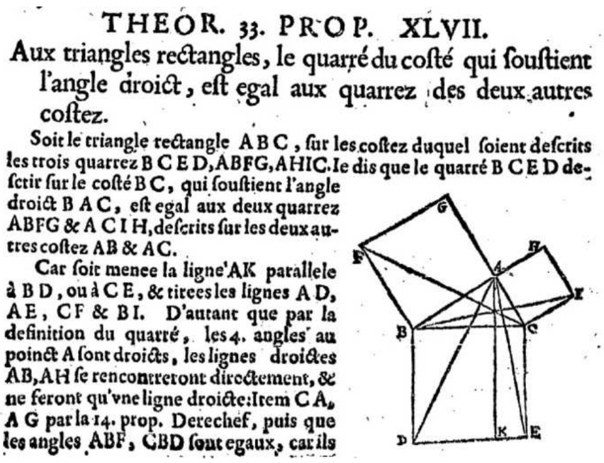
Théorème de Pythagore et trigonométrie



THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux quarrez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle A B C, sur les costez duquel soient descrits les trois quarrez B C E D, ABFG, AHIC. Ie dis que le quarré B C E D descrit sur le costé B C, qui soustient l'angle droict B A C, est egal aux deux quarrez ABFG & A C I H, descrits sur les deux autres costez AB & AC.

Car soit menee la ligne AK parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, C F & B I. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item C A, A G par la 14. prop. Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils

Les éléments d'Euclide, traduit par Didier Henrion, 1632 © gallica.bnf.fr

Un peu d'histoire

Pythagore de Samos était un astronome, philosophe, musicologue, disciple de **Thalès**. Aucun écrit ne nous est parvenu, et on doit se fier aux historiens de l'Antiquité quant à sa biographie et ses œuvres. Il crée son école à *Crotone*, laquelle devient rapidement une secte aux règles de vie très sévères. Devenant dérangeant, il meurt assassiné.

On attribue à Pythagore l'origine du terme *mathématiques* au sens grec de *mathematikos* : celui qui veut apprendre (scientifiquement). Pythagore est surtout connu par le « grand public » par le célèbre théorème qui porte son nom mais qui existait bien avant lui ! En effet, on retrouve des traces de mesures poussées sur les mesures des triangles rectangles sur d'anciennes tablettes (d'argile) babyloniennes datant de -1800 av. J.-C. ainsi que sur les bords du Nil, en Égypte.

Le nom de Pythagore veut dire « annoncé par le dieu pythien », en relation avec la Pythie de Delphes, vers qui son père, Mnésarque, appris ceci : « ta femme est enceinte et mettra au monde un enfant qui l'emportera en beauté et en sagesse. »

Ce qu'il faut savoir

1. Théorème de Pythagore

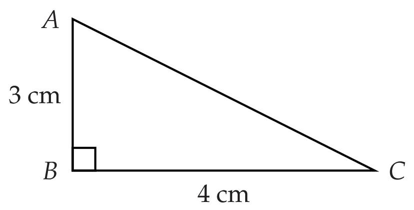
PROPRIÉTÉ : Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

MÉTHODE 1 Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

On utilise la propriété de Pythagore en respectant la rédaction :
- citer le triangle rectangle dans lequel on se trouve ainsi que l'angle droit ;
- citer la propriété utilisée (« d'après la propriété de Pythagore ») ;
- écrire l'égalité ;
- calculer la longueur du côté.

Exercice d'application **Longueur de l'hypoténuse**

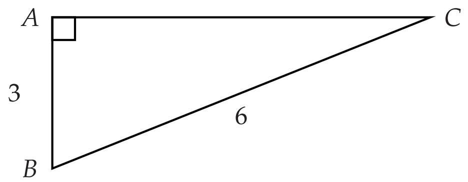


Correction On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$
$$AC = \sqrt{25} = 5$$

Donc la longueur de AC est de 5 cm.

Exercice d'application **Longueur d'un côté adjacent**



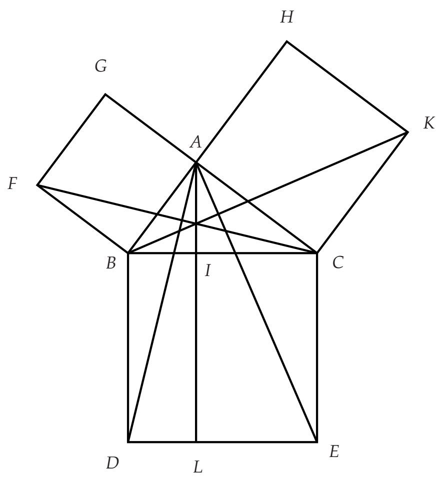
Correction On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$AC^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$
$$AC = \sqrt{27} \simeq 5,2.$$

La longueur de AC est d'environ 5,2 cm.

Il existe plus de 300 démonstration du théorème de Pythagore. En voici une utilisant les propriétés géométriques des aires. Il s'agit de la **démonstration d'Euclide** (vers −300 av. J.-C.).

PREUVE On désigne par $\mathcal{A}(P)$ l'aire du polygone P.



- $BD = BC$; $BA = BF$ et $\widehat{DBA} = \widehat{CBF}$
  $\Longrightarrow$les triangles DBA et CBF sont isométriques,
  $\Longrightarrow \mathcal{A}(DBA) = \mathcal{A}(FBC)$.
- $\mathcal{A}(DBA) = \mathcal{A}(DBI) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(DBIL)$
  $\mathcal{A}(FBC) = \mathcal{A}(FBA) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(FBAG)$
  $\Longrightarrow \mathcal{A}(DBIL) = \mathcal{A}(FBAG)$.
- De même, on peut démontrer que $\mathcal{A}(ECIL) = \mathcal{A}(KCAH)$
- $\mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(DBIL) + \mathcal{A}(ECIL)$
  $\Longrightarrow \mathcal{A}(BCED) = \mathcal{A}(FBAG) + \mathcal{A}(KCAH)$
  $\Longrightarrow \boldsymbol{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

2. Réciproque du théorème de Pythagore

PROPRIÉTÉ : Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré de la longueur du côté le plus grand est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.

MÉTHODE 2 Déterminer si un triangle possède un angle droit

- repérer le côté le plus grand ;
- calculer séparément :
  - le carré du plus grand côté ;
  - la somme des carrés des deux autres côtés ;

deux cas peuvent se présenter :

il y a égalité
- écrire l'égalité ;
- citer la propriété utilisée : « d'après la réciproque du théorème de Pythagore... » ;
- conclure : « le triangle est rectangle en... »

il n'y a pas égalité
- écrire l'inégalité ;
- citer la propriété utilisée : « d'après le théorème de Pythagore... » ;
- conclure : « le triangle n'est pas rectangle. »

Exercice d'application Soit ABC un triangle tel que $AC = 10$, $AB = 6$ et $BC = 8$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Correction Le côté le plus long étant $[AC]$, si le triangle est rectangle, il l'est en B.
- $AC^2 = 10^2 = 100$;
- $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

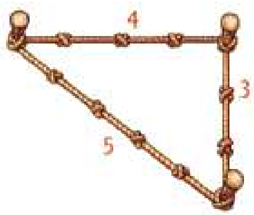
On a l'égalité : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice d'application Soit ABC un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 16$ et $BC = 12$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Correction Le côté le plus long étant $[AB]$, si le triangle est rectangle, il l'est en C.
- $AB^2 = 16^2 = 256$;
- $AC^2 + CB^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

On a : $AB^2 \neq AC^2 + CB^2$.
D'après le théorème de Pythagore, si le triangle ABC était rectangle en C, on aurait l'égalité, ce qui n'est pas le cas donc : le triangle ABC n'est pas rectangle.

REMARQUE : Lorsqu'il n'y a pas égalité, on utilise un raisonnement par contraposition, c'est à dire un raisonnement qui consiste à passer d'un énoncé direct de type $[A \Longrightarrow B]$ à sa formule contraposée de type $[non\ B \Longrightarrow non\ A]$.



Les géomètres égyptiens de l'époque pharaonique (donc bien avant la naissance de Pythagore) disposaient d'une corde sur laquelle ils avaient effectué 13 nœuds consécutifs situés à des intervalles réguliers. Celle-ci permettait de former des angles droits.

Ce qu'il faut savoir

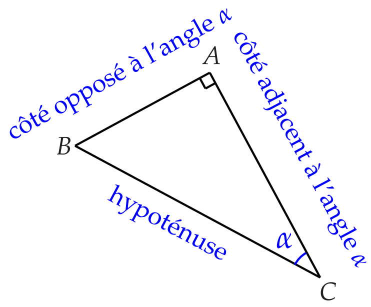
3. Trigonométrie dans le triangle rectangle

DÉFINITION : Cosinus, sinus, tangente

Soit ABC un triangle rectangle en A ; on note α la mesure l'angle aigu $\widehat{ACB}$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB} \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$



moyen mnémotechnique pour se rappeler des formules :

$$\frac{\text{SO}}{\text{H}}\,\frac{\text{CA}}{\text{H}}\,\frac{\text{TO}}{\text{A}}$$

Ces formules permettent de calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle.

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A, avec $AB = 12$ cm et $AC = 16$ cm.
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$.

Correction

On peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant la formule de la **tangente** :

$\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12\text{ cm}}{16\text{ cm}} = \dfrac{3}{4}$

d'où $\widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) \simeq 36,9°$.

REMARQUE : la touche 

de la calculatrice permet de déterminer l'angle correspondant à une tangente.

Inversement, les formules de trigonométrie permettent de calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle.

Exemple

Soit le triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 12$ cm et $\alpha = \widehat{ACB} = 30°$.
Calculer BC.

Correction

On peut calculer la longueur du côté $[BC]$ en utilisant la formule du **sinus** :

$\sin\alpha = \sin\widehat{ACB} = \dfrac{BA}{BC}$

d'où $BC = \dfrac{BA}{\sin\alpha} = \dfrac{12\text{ cm}}{\sin 30°} = 24$ cm.

PROPRIÉTÉ : Trigonométrie

Si α est la mesure (en degrés) d'un angle aigu dans un triangle.
On a $0 < \alpha < 90°$ et les propriétés suivantes :

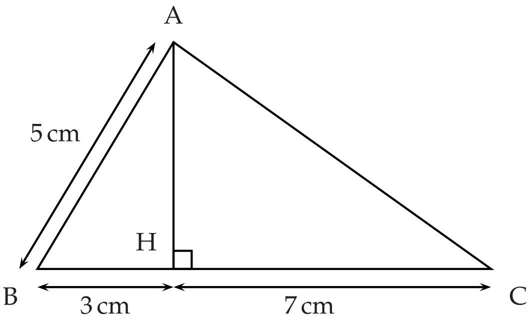
- $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$.
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ et $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
4e	G1	Triangle rectangle	1. et 2.
	G4	Cosinus	3.
3e	G2	Cosinus	3.

1 Rectangle ou non ?

On considère le triangle ABC ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



1) Calculer la hauteur AH.

2) Calculer la valeur arrondie au millimètre de la longueur du côté [AC].

3) Le triangle ABC est-il rectangle ?

2 Pouce !

Marc décide de calculer la longueur de la diagonale de l'écran de sa console (écran rectangulaire).
Il sait que cet écran mesure 5,2 cm de large et 6,2 cm de long.

1) Calculer la longueur de cette diagonale au millimètre près.

2) Sur la publicité de cette console, il est indiqué que sa diagonale mesure trois pouces. En déduire une valeur approchée de un pouce.

3) Un netbook a un écran de 10,1 pouces. Quelle est la longueur de la diagonale de l'écran de ce netbook en cm ?

3 Pêle-même

1) ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 2,4 cm et $\widehat{ACB} = 44°$. Calculer AC au mm près.

2) SRT est un triangle rectangle en S tel que SR = 4 cm et RT = 6 cm. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.

3) ATR est un triangle rectangle en A tel que AT = 9,6 cm et $\widehat{TRA} = 30°$. Calculer AR au mm près.

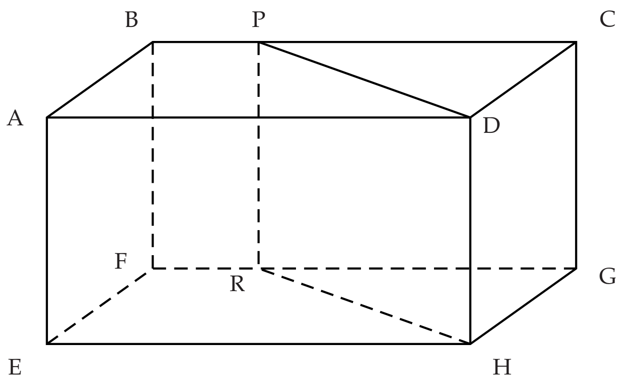
4 CRPE 2005 Besançon

Les nombres a, b et c sont des nombres entiers tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$.
On suppose que a, b et c sont les mesures de longueur des côtés d'un triangle rectangle.
Montrez que l'un au moins de ces trois nombres est pair.

Vu au CRPE

5 CRPE 2005 Grenoble

Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous est coupé selon un plan et la section obtenue est le quadrilatère DPRH.



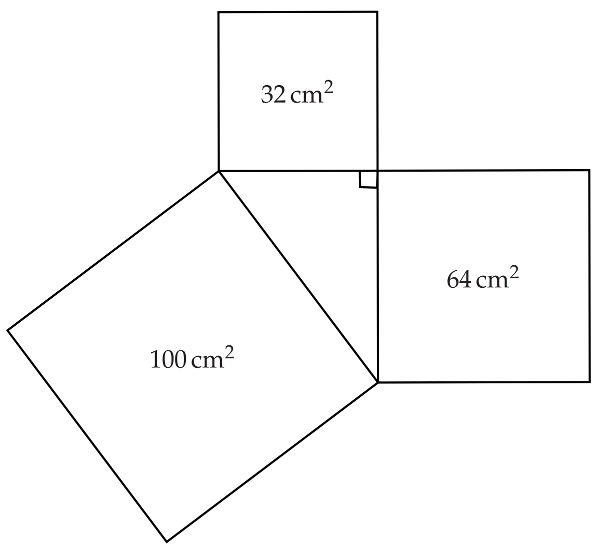
On donne EH = 8 cm, HG = 5 cm, CG = 4 cm et BP = 2 cm.

1) Tracez en vraie grandeur le quadrilatère DPRH.
2) Calculez la valeur exacte de PH.
3) Calculez le volume du prisme ABPDEFRH.

6 CRPE 2012 G1

La figure ci-dessous représente trois carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle. Dans chacun des carrés est indiquée son aire.

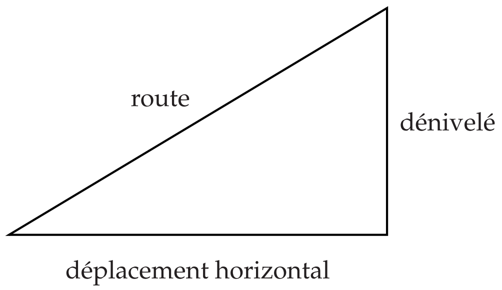
L'affirmation suivante est-elle vraie : la construction à l'échelle de cette figure est possible.

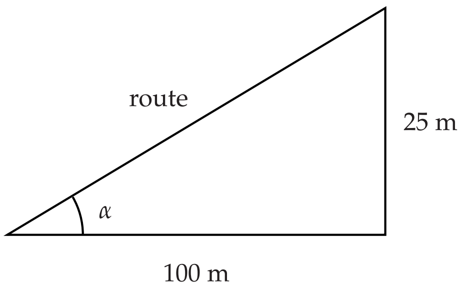


7 CRPE 2014 G2

Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la station de ski de Kitzbühel.
Lors de la montée à la station, sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25%. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).
Ainsi une pente de 25% indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.

La figure n'est pas à l'échelle





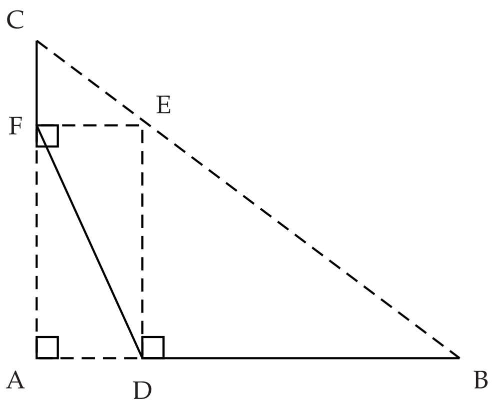
On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1) Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.
2) Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

8 CRPE 2016 G3

On donne trois points A, B, C tels que AB = 8 cm, AC = 6 cm ; les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
On place :

- un point D appartenant au segment [AB] distinct de A et B ;
- le point E, intersection du segment [BC] et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par D ;
- le point F, intersection du segment [AC] et de la perpendiculaire à la droite (AC) passant par E.



1) Démontrer que BC = 10 cm.
2) Déterminer une mesure en degré de l'angle $\widehat{ABC}$ (on donnera le résultat arrondi à l'unité).
3) Démontrer que AE = DF.

Vu au CRPE

9 D'après CRPE 2017 G1

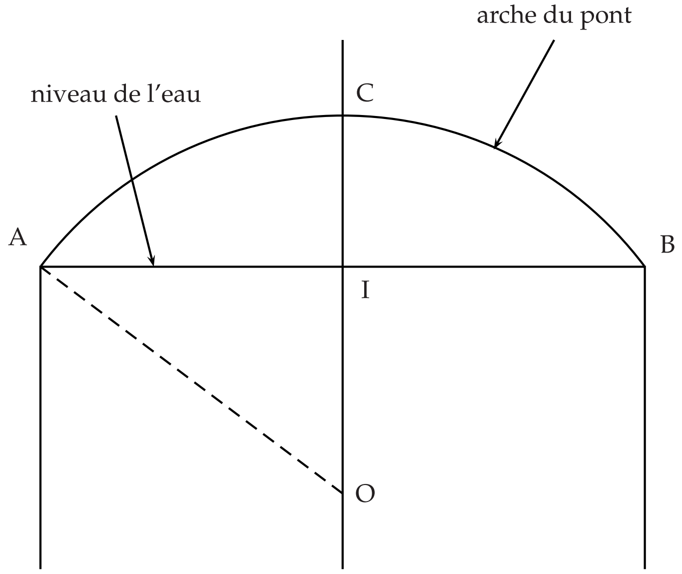
On considère un triangle ABC d'aire $18\,\text{cm}^2$ tel que $AB = 7{,}3$ cm ; $AC = 7{,}5$ cm et $BC = 5{,}2$ cm.
Soit D le pied de la hauteur issue de B, on appelle E le point du segment $[AD]$ tel que $[ED]$ mesure 0,9 cm.

1) Calculer BD au millimètre.
2) Déterminer la mesure en degré, arrondie au centième de degré, de l'angle $\widehat{DBE}$.

10 CRPE 2017 G3

Un pont a une arche en forme d'arc de cercle.

Lors d'une crue, l'eau atteint les sommets A et B des piliers du pont.
La hauteur maximale IC entre le niveau de l'eau et le sommet de l'arche est alors de 5 mètres.
L'écartement AB entre les deux piliers du pont est de 24 mètres.
La situation est modélisée par le schéma ci-contre, qui n'est pas à l'échelle, sur lequel O est le centre de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ et (CO) est l'axe de symétrie de la figure.



1) Montrer que le rayon OA de l'arche est 16,9 m.
2) On assimile la coupe de la partie émergée d'une péniche, vue de face, à un rectangle de 4 mètres de haut et de 12 mètres de large.

La situation est modélisée par le schéma ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle sur lequel on a EH = 12 m et FE = 4 m.
Cette péniche peut-elle passer sous l'arche du pont sans dommages ? Justifier.