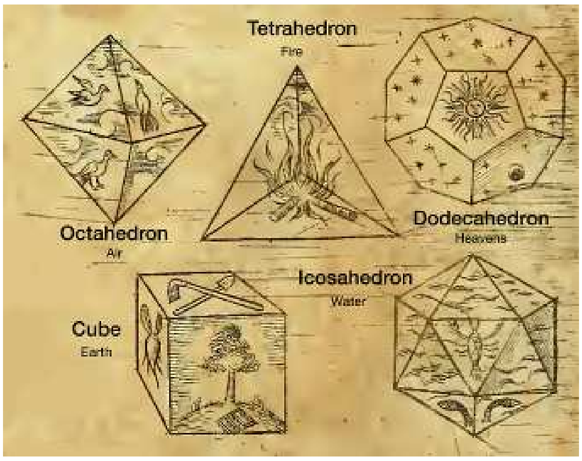
UE 22B

3

Géométrie dans l'espace



Les solides de Platon, Harmonices Mundi, 1619 - Johannes Kepler

Un peu d'histoire

Les solides de l'espace figurent dans les livres 11 à 13 des *éléments* d'**Euclide**.

Parmi les solides de l'espace, il en est une sorte qui a été étudiée (entre autre) par le philosophe grec **Platon** (-425 ; -348 av. J.-C.) : les polyèdres réguliers et convexes. Dans le *Timée*, l'un des derniers dialogues de Platon, ce dernier décrit la genèse du monde physique et de l'homme. Il associe chacun des quatre éléments physiques avec un solide régulier :

- la Terre est associée avec le *cube* : ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit ;
- l'air avec l'*octaèdre* : ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir ;
- l'Eau avec l'*icosaèdre* : elle s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules ;
- le feu avec le *tétraèdre* : la chaleur du feu est pointue.

Pour le cinquième solide, le *dodécaèdre*, Platon le met en correspondance avec le tout, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère.

Ce qu'il faut savoir

1. Polyèdres

DÉFINITION : Polyèdre

Un **polyèdre** est un solide de l'espace délimité par un nombre fini de polygones, appelés les faces du polyèdre.

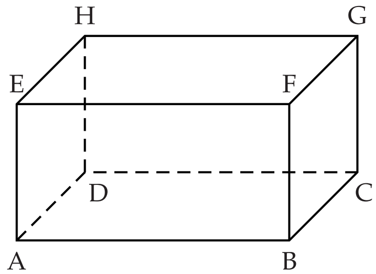
Pour représenter un solide de l'espace, on utilise généralement la **perspective cavalière** : technique de dessin permettant de représenter un solide sur une surface à deux dimensions en respectant le parallélisme.

Exemple

Représentation d'un parallélépipède rectangle en perspective cavalière.

1) on trace en vraie grandeur la face de devant ;
2) on trace les arêtes visibles des faces latérales parallèles et de même longueur : ce sont les fuyantes, plus courtes que leur mesure réelle ;
3) on trace les arêtes cachées en pointillés.

Correction



Ce parallélépipède rectangle possède :

- 8 **sommets** : A, B, C, D, E, F, G et H ;
- 12 **arêtes** : $[AB]$, $[BC]$, $[AE]$, $[BF]$, $[EF]$, $[FG]$, $[CG]$, $[EH]$ et $[GH]$ apparentes, et $[AD]$, $[DC]$ et $[DH]$ cachées ;
- 6 **faces** : $ABFE$ est la face de devant, $CDHG$ celle de derrière, $ABCD$ la face du dessous, $EFGH$ celle du dessus, $BCGF$ la face de droite, et $ADHE$ celle de gauche.

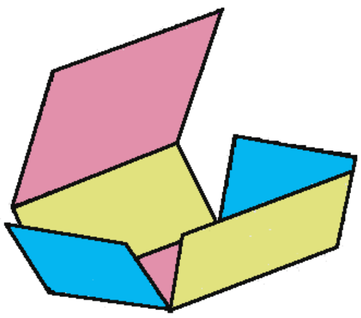
2. Patron

DÉFINITION : Patron

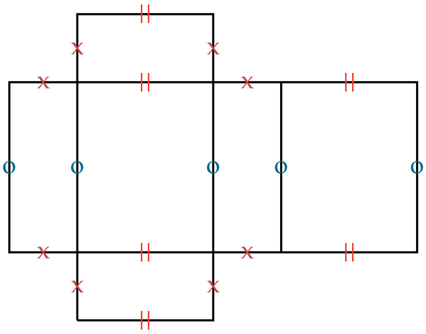
Le **patron** d'un solide est une surface plane d'un seul tenant qui, par pliage, permet de reconstituer le solide sans recouvrement de ses faces.

On « déplie » le parallélépipède rectangle pour en obtenir un de ses patrons :

Exemple



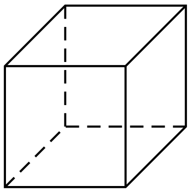
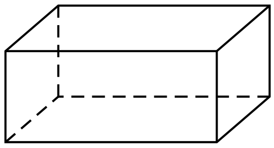
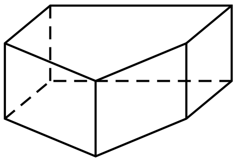
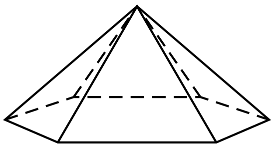
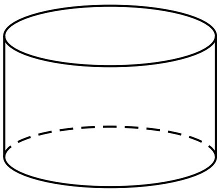
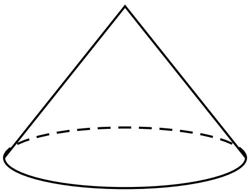
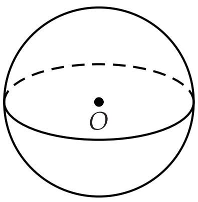
Correction



Le patron d'un polyèdre n'est pas unique, il dépend de la manière dont on le déplie.

⚠ On ne parle de patron que pour un polyèdre. On parle de développement pour un cylindre ou un cône.

3. Solides particuliers

nom	représentation	propriétés
cube		un cube est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des carrés.
pavé		un pavé, ou parallélépipède rectangle est un polyèdre possédant 6 faces qui sont des rectangles.
prisme		un prisme est un polyèdre possédant deux faces polygonales parallèles et isométriques, les autres étant des rectangles.
pyramide		une pyramide est un polyèdre dont la base est un polygone et dont toutes les autres faces sont des triangles ayant un sommet commun appelé sommet de la pyramide.
cylindre		un cylindre (de révolution) est un solide à deux faces parallèles en forme de disque de même rayon et dont la surface latérale est engendrée par le déplacement d'une droite orthogonale au disque et suivant le contour de ce disque.
cône		un cône (de révolution) est un solide à une face en forme de disque et dont la surface latérale est engendrée par le déplacement d'une droite qui décrit la circonférence du disque autour d'un point fixe appelé le sommet du cône.
sphère		une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.

Ce qu'il faut savoir

4. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

PROPRIÉTÉ : Droite, plan

- Par deux points distincts A et B de l'espace passe une seule droite, notée (AB).
- Par trois points non alignés A, B et C de l'espace passe un seul plan, noté (ABC).
- Si un plan contient deux points A et B, il contient toute la droite (AB).
- Dans tout plan de l'espace, tout résultat de géométrie plane s'applique.

Remarque : un plan est une surface plane illimitée. Il est entièrement déterminé par trois points non alignés. Cette surface est représentée en perspective par un parallélogramme.

DÉFINITION : Orthogonalité

- Deux droites de l'espace sont **orthogonales** si leurs parallèles menées par un point sont perpendiculaires.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

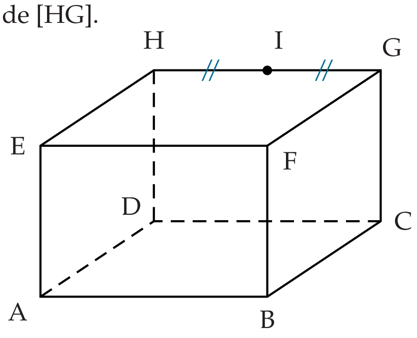
PROPRIÉTÉ

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan, alors elle est orthogonale au plan (donc à toute droite du plan).

⚠ Dans l'espace, des droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et n'ont donc pas nécessairement de point d'intersection. Il faut bien faire la distinction entre des droites orthogonales et des droites perpendiculaires (qui ont, elles, un point d'intersection).

Exemple

ABCDEFGH est un pavé, I est le milieu de [HG].



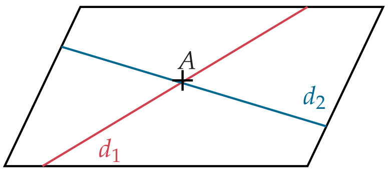
Correction

- La face EFGH du dessus est contenue dans le plan (EHG), ou (EFG), ou (EIF)... il suffit de choisir trois points non alignés de la face.
- Les droites (EA) et (FG) sont orthogonales car (EA) est perpendiculaire à (AD), elle même parallèle à (FG).
- La droite (CB) est orthogonale au plan (ABF) puisque (CB) est perpendiculaire à (BA) et à (BF) qui sont deux droites sécantes du plan (ABF).

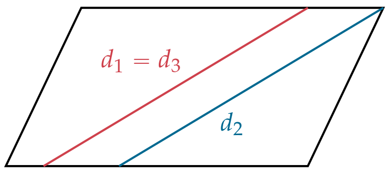
5. Positions relatives

Position relative de deux droites.

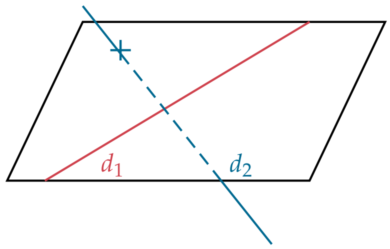
Droites coplanaires sécantes : un point d'intersection



Droites coplanaires parallèles : aucun ou une infinité de points d'intersection

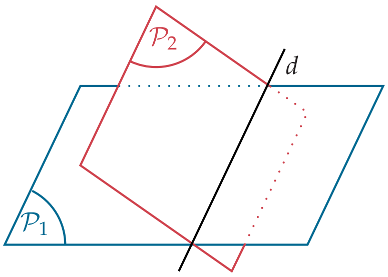


Droites non coplanaires : aucun point d'intersection

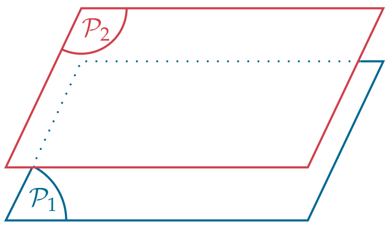


Position relative de deux plans.

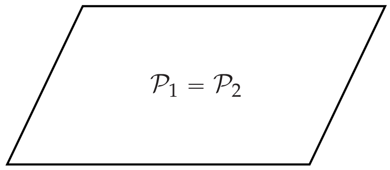
Plans sécants : une droite d'intersection



Plans parallèles strictement : aucun point d'intersection

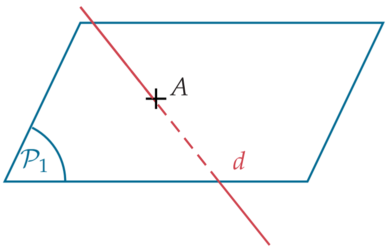


Plans parallèles confondus : un plan d'intersection

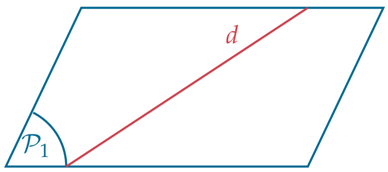


Position relative d'une droite et d'un plan.

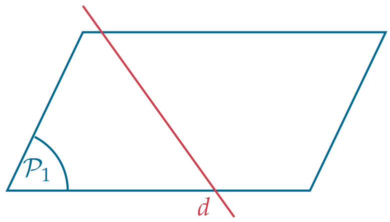
Droite et plan sécants : un point d'intersection



Droite et plan parallèles : droite incluse dans le plan

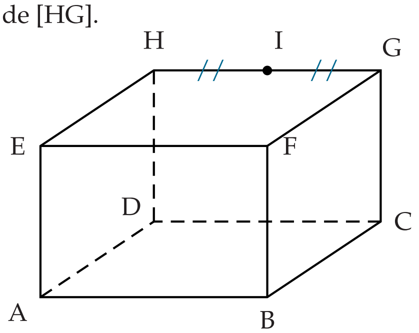


Droite et plan parallèles : aucun point d'intersection



Exemple

ABCDEFGH est un pavé, I est le milieu de [HG].



Correction

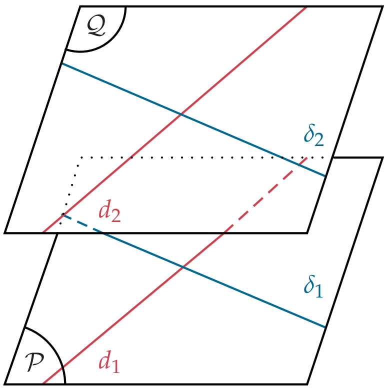
- Les droites (IF) et (EG) sont coplanaires et sécantes, elles définissent le plan (HEF).
- Les droites (HF) et (DB) sont parallèles, elles définissent le plan (DBF).
- Les droites (HE) et (IC) sont non coplanaires.
- Les plans (IFB) et (AEF) sont sécants suivant la droite (FB).
- Les plans (DHC) et (FBA) sont parallèles.
- Les droites (HF) et (AC) sont dans des plans parallèles, mais elles ne sont pas parallèles.

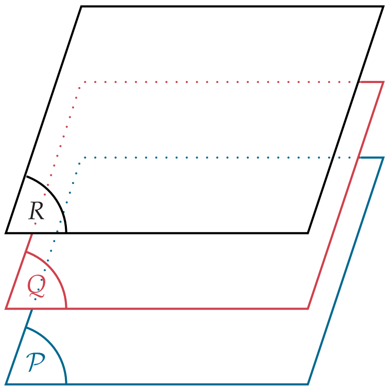
Ce qu'il faut savoir

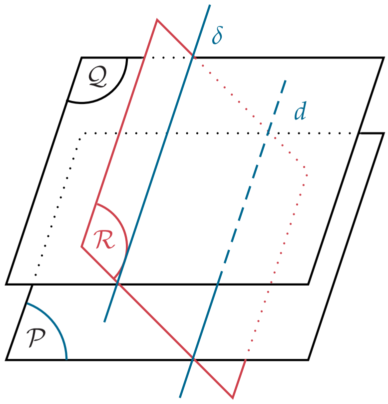
6. Règles d'incidence et de parallélisme

PROPRIÉTÉ : Droites et plans parallèles

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{Q}$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.





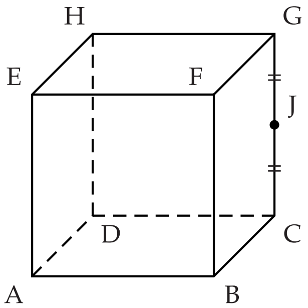


Maîtriser les bases avec MathenPoche

Classe	N°	Thème	Dans le cours
6e	G4	Espace	1. et 2.
5e	G5	Prismes et cylindres	3.
4e	G5	Pyramide et cônes	3.
3e	G3	Géométrie dans l'espace	1. à 5.
2nde	G1	Espace	1. à 5.

1 Des triangles dans un cube

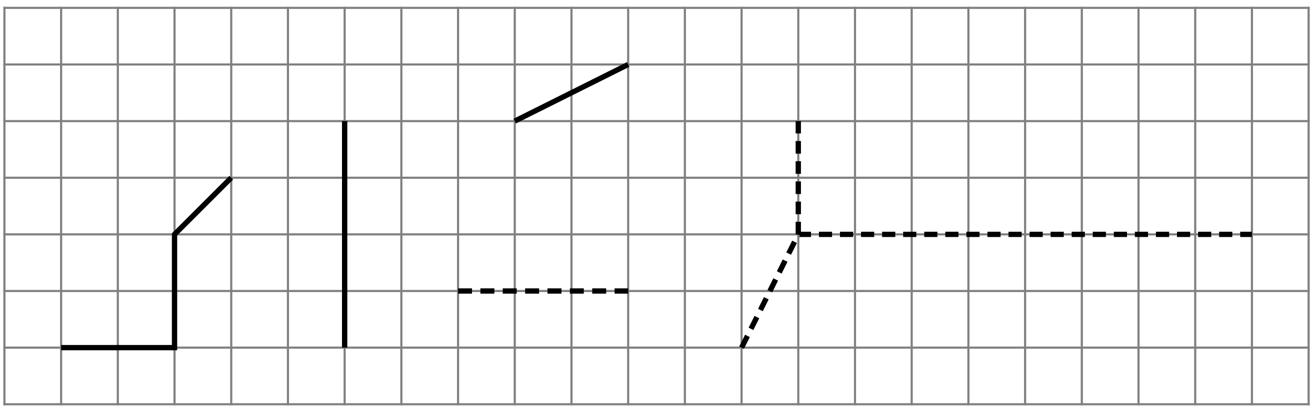
La figure ci-dessous représente un cube. Compléter le tableau. Pour la dernière ligne, on nommera un triangle autre que ceux déjà cités.



Triangle	Rectangle ?	Isocèle ?	Équilatéral ?
DJH			
ACG			
AFC			
EHG			
	oui	non	non

2 Perspective cavalière... sans cheval ;-)

Terminer la représentation en perspective cavalière des trois pavés suivants :



3 just for fun

Combien y-a-t'il de patrons différents du cube (c'est à dire non superposables) ?

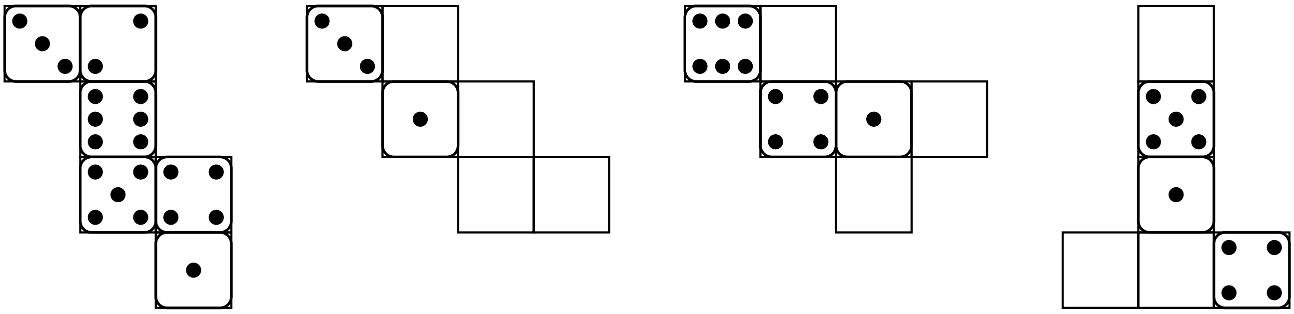
4 Le chapeau de clown

Pour le carnaval, Noé veut fabriquer un chapeau de clown conique pour sa poupée. Pour cela, il mesure son tour de tête : 21 cm. La génératrice du cône mesure 10 cm. Construire le développement du chapeau.

Pour s'entraîner

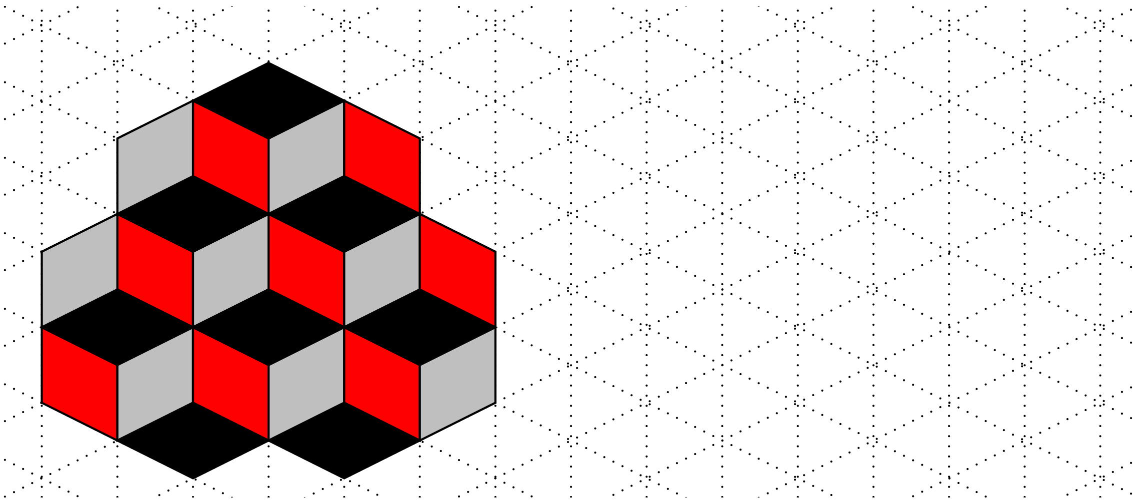
5 Patron svp !

On donne le patron d'un dé, compléter les autres patrons du même dé.



6 Illusion

Reproduire la figure suivante en perspective isométrique : combien y a-t-il de cubes entiers ?

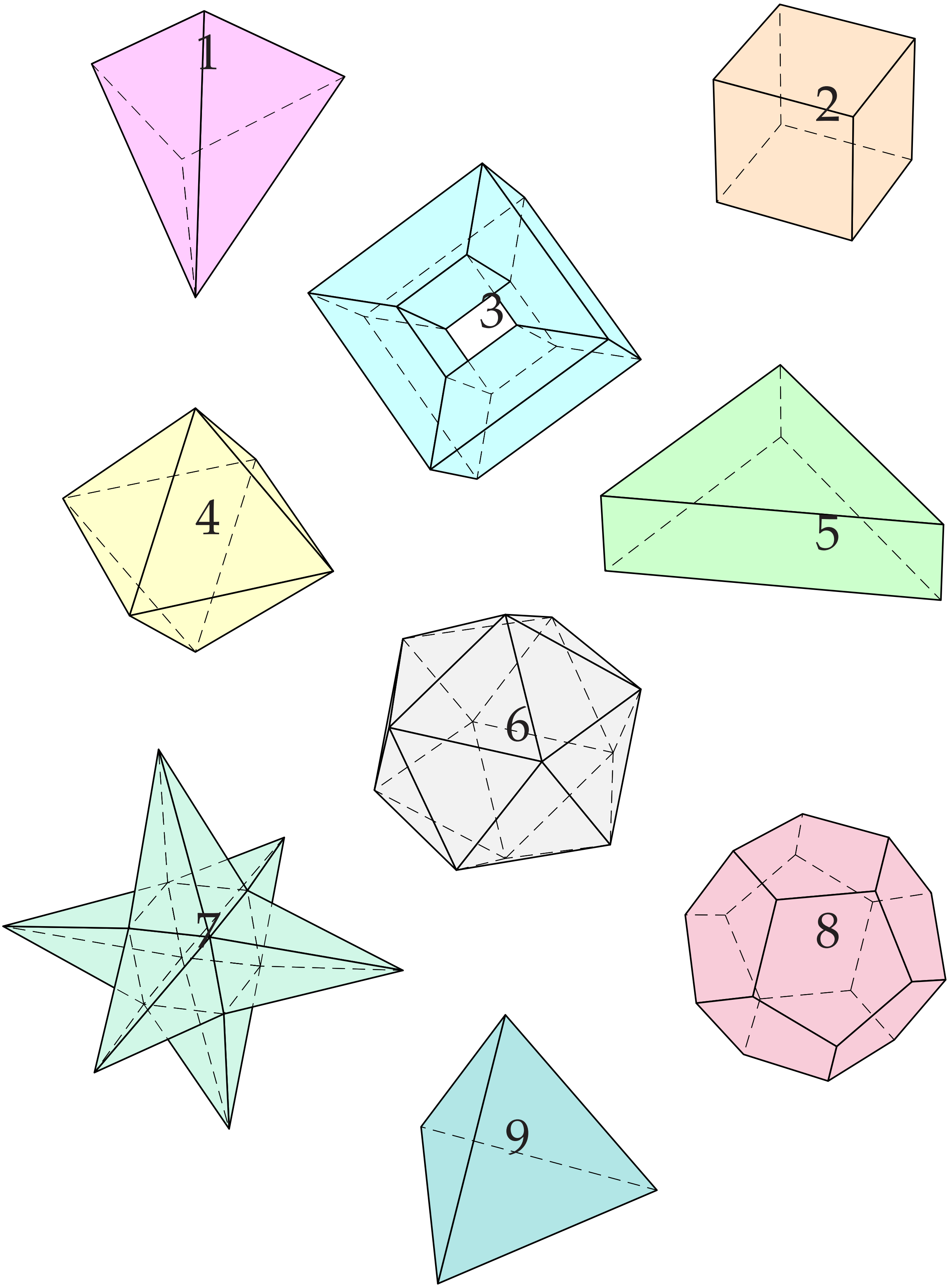


7 La relation d'Euler

D'après une activité parue dans la revue Envol. n129, octobre-novembre-décembre 2004.

Pour chaque polyèdre nommé dans le tableau, retrouver sa représentation en perspective cavalière page suivante, dénombrer le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de faces F, puis calculer la caractéristique d'Euler S − A + F. Enfin, dire si le solide est régulier, convexe, et s'il s'agit d'un solide de Platon (polyèdre régulier convexe). Discuter des valeurs obtenues.

Nom du solide	n	S	A	F	S − A + F	régulier ?	convexe ?	Platon ?
Tétraèdre								
Polyèdre étoilé								
Octaèdre								
Pyramide								
Icosaèdre								
Prisme								
Cube								
Beignoïde								
Dodécaèdre								

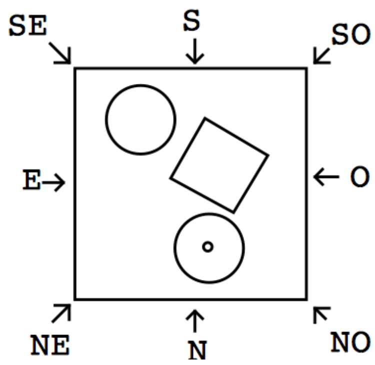

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Vu au CRPE

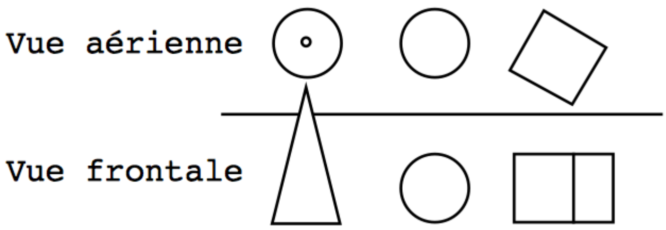
8 **CRPE 1992 Orléans-Tours**

On dispose de trois objets sur une table comme l'indique la figure ci-dessous. Ces trois objets sont un cône, un cube et une sphère. On trouvera ci-dessous leurs représentations selon deux points de vue.

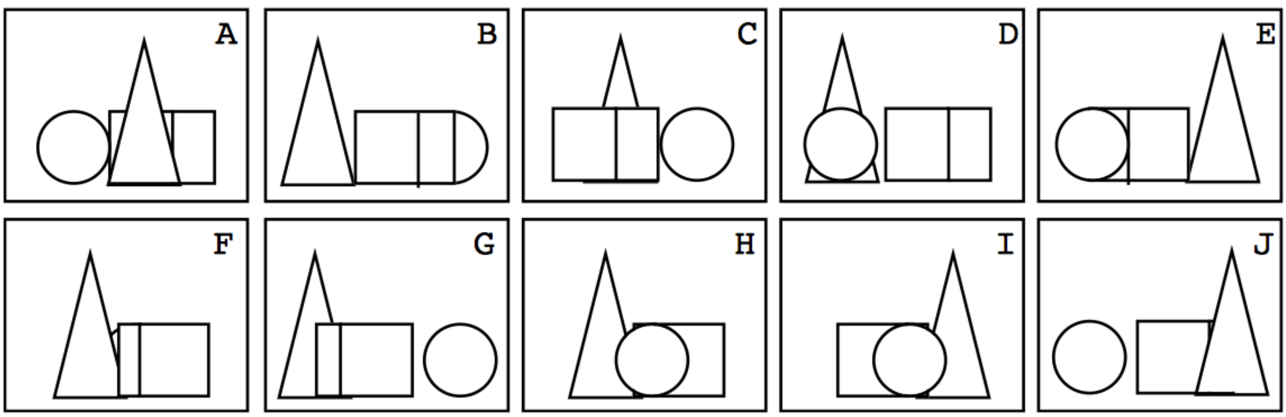
La table, vue du dessus :



Schématisation dans l'ordre du cône, de la sphère et du cube, vue du dessus et vue de face :

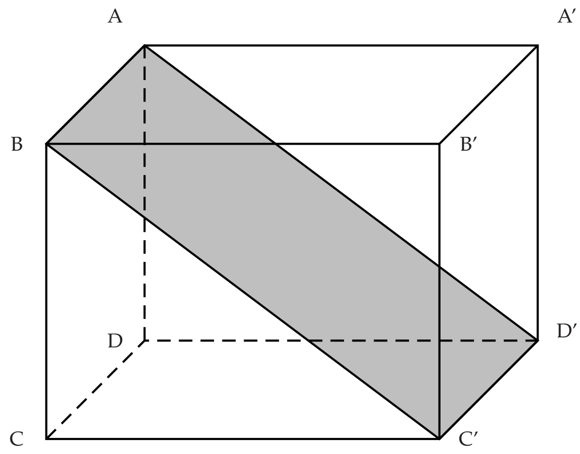


Les images qui suivent représentent des vues, selon divers axes de visée (par exemple, l'image G correspond à la direction SO). Déterminer le point de vue de chaque image.



9 CRPE 1996 Dijon

On considère un parallélépipède rectangle pour lequel AB = $2u$, BC = $3u$ et AA′ = $4u$, u étant l'unité de mesure de longueur.



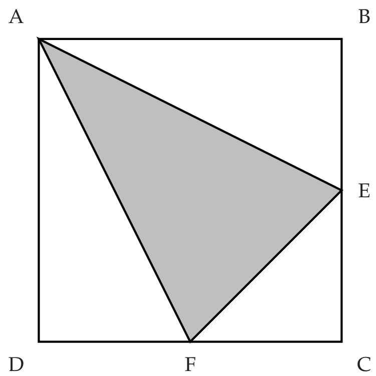
On pratique une coupe selon le plan (ABC′D′). On obtient deux prismes identiques nommés ADD′C′CB que nous appellerons P_1 et AA′D′C′B′B que nous appellerons P_2, et qui ont chacun 5 faces.

1) Nommer et donner la nature géométrique des 5 figures planes qui composent P_1.

2) Dessiner deux patrons différents de ce prisme en prenant 1 cm comme unité (deux patrons sont dits différents s'ils ne sont pas superposables). La construction sera réalisée sur papier uni, avec règle graduée, équerre et compas.

10 CRPE 1998 Limoges

1) On considère la figure ci-dessous formée de quatre triangles, formant un carré ABCD de côté 4 cm.



a) Justifier que ce patron ne peut pas être un patron de prisme.

b) Où doivent être placés les points E sur le segment [BC] et F sur le segment [CD] pour que ce patron soit un patron de pyramide ?

c) Préciser alors la nature de cette pyramide ainsi que la nature de chacune de ses quatre faces.

2) Soit K le sommet du solide où se rejoignent les points B, C et D du patron. On obtient la pyramide AEFK.

a) Montrer que l'on peut faire coïncider la pyramide avec le coin d'un cube de côté 4 cm.

b) Représenter un cube en perspective cavalière et y tracer une représentation de la pyramide.