TRANSVERSAL
2

Proportionnalité (didactique)

Dans les programmes - cycle 3

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

- Proportionnalité : reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

- Proportionnalité : identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs. Graphiques représentant des variations entre deux grandeurs.

Reconnaitre et utiliser quelques relations géométriques

- Proportionnalité : reproduire une figure en respectant une échelle. Agrandissement ou réduction d'une figure.

Ce qu'il faut savoir

1. Des programmes 2008 aux programmes 2015

Dans les programmes de 2008, la proportionnalité apparaît à part entière dans le thème « Organisation et gestion de données ». Ce thème ayant disparu des nouveaux programmes de 2015 en tant que tel, la proportionnalité se traite en fil rouge dans les trois domaines que sont « Nombres et calculs », « Espace et géométrie », et « Grandeurs et mesures ».
La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans un cadre professionnel. Son apprentissage s'inscrit dans la durée. À l'école primaire, les premiers problèmes de proportionnalité rencontrés sont des problèmes de multiplication et des problèmes de division (« un ballon de foot pèse 450 g, combien pèsent 3 ballons de foot identiques ? »). Proposés dès le CE1, ils sont résolus à l'aide de procédures personnelles et préparent les élèves à la reconnaissance de situations de proportionnalité.
D'après les repères de progressivité des programmes, c'est à partir du CM1 que le langage spécifique de proportionnalité apparait : le recours aux propriétés de linéarité (additive, multiplicative, puis mixte) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelles à l'aide d'exemples (« si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients » ; « si 6 stylos coutent 10 euros et 3 stylos coutent 5 euros, alors 9 stylos coutent 15 euros »). Les procédures du type passage par l'unité ou calcul du coefficient de proportionnalité sont mobilisées progressivement sur des problèmes le nécessitant et en fonction des nombres (entiers ou décimaux) choisis dans l'énoncé ou intervenant dans les calculs. Si le coefficient de proportionnalité est rencontré au cours moyen, notamment lors de travaux sur les échelles, son institutionnalisation dans un cadre général peut être reportée en toute fin de cycle 3.
À partir du CM2, des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes peuvent être rencontrées. Le sens de l'expression « ...% de » apparait en milieu de cycle. Il s'agit de savoir l'utiliser dans des cas simples (50%, 25%, 75%, 10%) où aucune technique n'est nécessaire, en lien avec les fractions d'une quantité. C'est seulement en fin de cycle ($6^{\text{ème}}$) que l'application d'un taux de pourcentage est un attendu.

Le cas particulier de la règle de trois.
Dans les programme de 2008, la réapparition de la « règle de trois » après des années de suppression (1995) fait couler beaucoup d'encre. L'objectif est de donner des outils de base, des techniques d'automatisation aux élèves.
La règle de trois est basée sur une des propriétés fondamentales des proportions, démontrée par *Euclide* dans ses éléments, qui, selon la traduction de *Denis Henrion* en 1632 s'écrit :

> **THEOR. 17. PROP. XIX.**
> **Si quatre nombres sont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, sera egal au produict du second par le tiers : Et si le produict du premier multiplié par le quart, est egal au produict du second par le tiers ; iceux quatre nombres sont proportionnaux.**

Cette propriété, plus communément appelée « produit en croix », figure uniquement au programme du cycle 4.
Dans les programmes de 2015, cette technique (re)disparait des programmes, probablement à cause de son aspect « recette de cuisine » que les élèves appliquent sans en comprendre le sens. Retour donc aux fondamentaux.
À la rentrée 2017, seuls les élèves de $6^{\text{ème}}$ seront sensé avoir vu cette règle de trois, s'ils l'ont vue en CM1 (génération programmes 2008) donc, à priori, le plupart des écoliers ne devraient plus connaître cette méthode sauf si elle a été tout de même enseignée par certains enseignants.

2. Les procédures de résolution à l'école

Au niveau de l'école primaire, on utilise essentiellement les propriétés de linéarité (additive, multiplicative ou mixte), ainsi que le passage à l'unité et le coefficient de proportionnalité dans des cas simples. L'objectif n'est pas, à ce stade, de mettre en avant telle ou telle procédure particulière, mais de permettre à l'élève de disposer d'un répertoire de procédures, s'appuyant toujours sur le sens, parmi lesquelles il pourra choisir en fonction des nombres en jeu dans le problème à résoudre. Chaque méthode devra être réinvestie dans les trois registres numérique - grandeurs - géométrique.

Procédure utilisant la propriété de linéarité additive.

Nombres et calculs	Grandeurs et mesures
On souhaite calculer 7×12. • $7 \times 10 = 70$; • $7 \times 2 = 14$; $12 = 10 + 2$ donc, par linéarité additive : $7 \times 12 = 70 + 14 = 84$.	3 kg de letchis coûtent 3,60 € ; 5 kg de letchis coûtent 6 € ; 8 kg de letchis coûtent 3,60 € + 6 € = 9,60 €.

Procédure utilisant la propriété de linéarité multiplicative.

Grandeurs et mesures	Espace et géométrie
Une douzaine d'oeufs identiques pèsent 600 g donc, par linéarité multiplicative : • 6 oeufs pèsent deux fois moins, soit 300 g ; • 36 oeufs pèsent trois fois plus, soit 1 800 g.	Mon triangle a pour mesures 3 cm, 4 cm et 5 cm. J'effectue un agrandissement pour que le côté le plus grand mesure 20 cm. Il s'agit d'un agrandissement de facteur 4, donc, les deux autres côtés mesurent respectivement 12 cm et 16 cm.

Autres procédures.

Une fois ces deux procédures fondamentales parfaitement assimilées, on peut entrer dans des problèmes de proportionnalité un peu plus complexes. Imaginons par exemple le problème suivant donné à des élèves de cycle 3 :
« *Axel a acheté 6 stylos tous identiques et au même prix. Il a payé 9 €. Combien aurait-il payé si il en avait acheté 15 ?* ».

Linéarité mixte	Passage par l'unité	Coefficient de proportionnalité
15 stylos = 12 stylos + 3 stylos ; 6 stylos coûtent 9 € ; • 12 stylos coûtent 18 € ; (deux fois plus) ; • 3 stylos coûtent 4,5 € (la moitié) ; 15 stylos coûtent 22,5 € (18 € + 4,5 € = 22,5 €).	6 stylos coûtent 9 € ; • 1 stylo coûte 1,5 € ; (9 € ÷ 6) 15 stylos coûtent 22,5 € ($15 \times 1,5$ € = 22,5 €).	6 stylos coûtent 9 € ; le coefficient de proportionnalité permettant de passer de 6 à 9 est de 1,5 ($6 \times 1,5 = 9$) ; 15 stylos coûtent 22,5 € ($15 \times 1,5 = 22,5$).
+ Méthode de calcul mental. + Facile à comprendre. – Peut être long.	+ Méthode ayant du sens. – Arrondis parfois source d'erreur.	+ Méthode rapide. – Coefficient difficile à trouver. – Moins intuitif.

3. Typologie des problèmes posés

On peut classer les problèmes de proportionnalité en plusieurs catégories.

Problèmes de recherche d'un 4ème proportionnelle : trois données sont connues, et on recherche la quatrième, ce sont les problèmes les plus classiques pouvant porter sur des grandeurs de même nature ou de nature différente.

Grandeurs de même nature	Grandeurs de nature différente
Sur une carte de la Réunion, 2,5 cm représentent 5 km dans la réalité. Pour aller de Saint-Denis à Saint-Pierre, on trouve 35 cm sur la carte. Quelle est la distance Saint-Denis – Saint-Pierre ?	J'ai payé 15 € pour 2 kg de fruits de la passion. Combien aurais-je payé si j'en avais acheté 5 kg ?

Problèmes de reconnaissance ou non de la proportionnalité : très importants afin que les élèves acquièrent un esprit critique et évitent d'utiliser systématiquement des procédures de proportionnalité.

Proportionnalité or not ?	Proportionnalité or not ?... bis
À 2 ans, je mesurais 80 cm. Quelle taille ferais-je lorsque j'aurai 20 ans ?	10 cahiers coûtent 8 €, 20 cahiers coûtent 16 € et 25 cahiers coûtent 20 €, est-on dans une situation de proportionnalité ?

Problèmes de comparaison : deux grandeurs sont en présence mais impliquées dans deux situations différentes. La question porte sur la comparaison des deux situations.

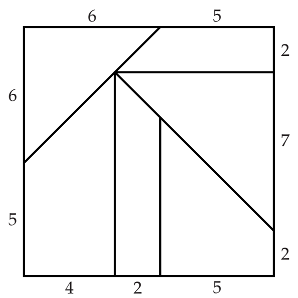
Comparaison de promotions	Comparaison de mélanges
Une boulangerie propose la promotion suivante : les 10 croissants à 2,90 € ou le lot de 4 au prix de 1,50 €. Dans lequel de ces deux lots le prix d'un croissant est-il le plus intéressant ?	Un mélange A est composé de 9 g de sucre dans 4 L d'eau. Un mélange B est composé de 11 g de sucre dans 5 L d'eau. Quel est le mélange le plus sucré ?

Problèmes de pourcentages, d'échelle, d'agrandissement et de réduction : ce sont tous des problèmes qui relèvent de la proportionnalité mais à travers des notions plus inhabituelles pour les élèves.

Pourcentages	Agrandissement
Dans une école de 200 élèves, 75 % des élèves mangent à la cantine. Yoan dit qu'il y a 50 élèves qui ne mangent pas à la cantine. A-t-il raison ?	Les élèves sont mis par groupe et chaque élève doit faire un agrandissement d'une pièce d'un puzzle. À la fin, on regroupe les pièces pour reconstituer le puzzle. La consigne est : le côté du puzzle qui mesure 4 cm doit mesurer 6 cm sur le puzzle que vous devez construire.

Puzzle de Guy Brousseau

Recherche en didactique, n°2.1



4. Difficultés et variables didactiques

Elles sont multiples, en voici quelques-unes :

• **Difficultés à reconnaître si la situation relève du modèle proportionnel ou non.**
La plupart des problèmes ne précisent pas explicitement si la situation est une situation de proportionnalité. C'est à l'élève de faire appel à ses références personnelles ou à deviner l'intention du maître (contrat didactique). Il appartient donc à l'école de doter les élèves de situations de référence suffisamment nombreuses (domaine économique, physique, géographique, mathématique. . .).
Il est donc important que les situations étudiées ne relèvent pas toutes du modèle proportionnel afin d'exercer la vigilance des élèves sur le choix des modèles et des procédures.

• **Difficulté du choix de la procédure de résolution adéquate.**
Nous avons vu qu'il n'existait pas une procédure unique menant à la résolution d'un problème de proportionnalité. L'élèves devra donc faire un choix.
Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des variables didactiques décisives.

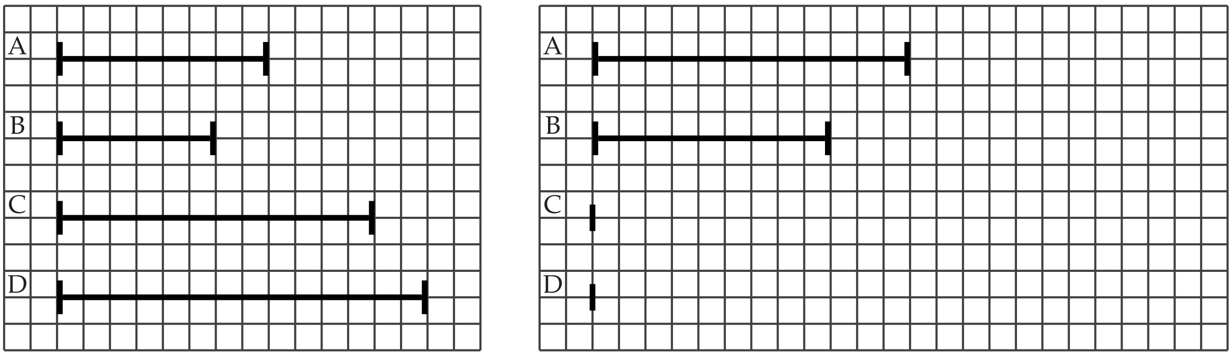
• **Mise en oeuvre de la procédure choisie.**
Une fois la procédure choisie, il faut la mettre en œuvre de manière efficace et juste et ce travail demande une bonne connaissance des nombres, le type des nombres est un variable didactique très importante sur laquelle on peut jouer (entiers, décimaux). L'exécution des calculs peut être aussi source de difficultés.

• **Comprendre que le fait qu'il y ait des augmentations ou des diminutions n'est pas forcément lié à des notions d'additions ou de soustraction.**
C'est souvent une « théorème en acte » des élèves : les expériences antérieures ont installé des idées fortes du genre « augmentation signifie addition et diminution signifie soustraction ».
Au moment de l'apprentissage de la proportionnalité, une rupture nécessaire avec ces concepts s'impose. Il appartient à l'enseignant de favoriser des situations problème pour que cette rupture puisse se faire.

Vu au CRPE

1 CRPE 1998 Montpellier

Le test suivant a été proposé à des élèves de différents niveaux de l'école élémentaire.
Voici quatre segments A, B, C, D ; on veut les agrandir. On a effectué l'agrandissement des segments A et B.
Effectue le même agrandissement pour les segments C et D.



Réponses des élèves (les longueurs sont exprimées en carreaux).

	Longueur du segment C	Longueur du segment D
Élève 1	16	18
Élève 2	18	20
Élève 3	18	21
Élève 4	12	14
Élève 5	16	19

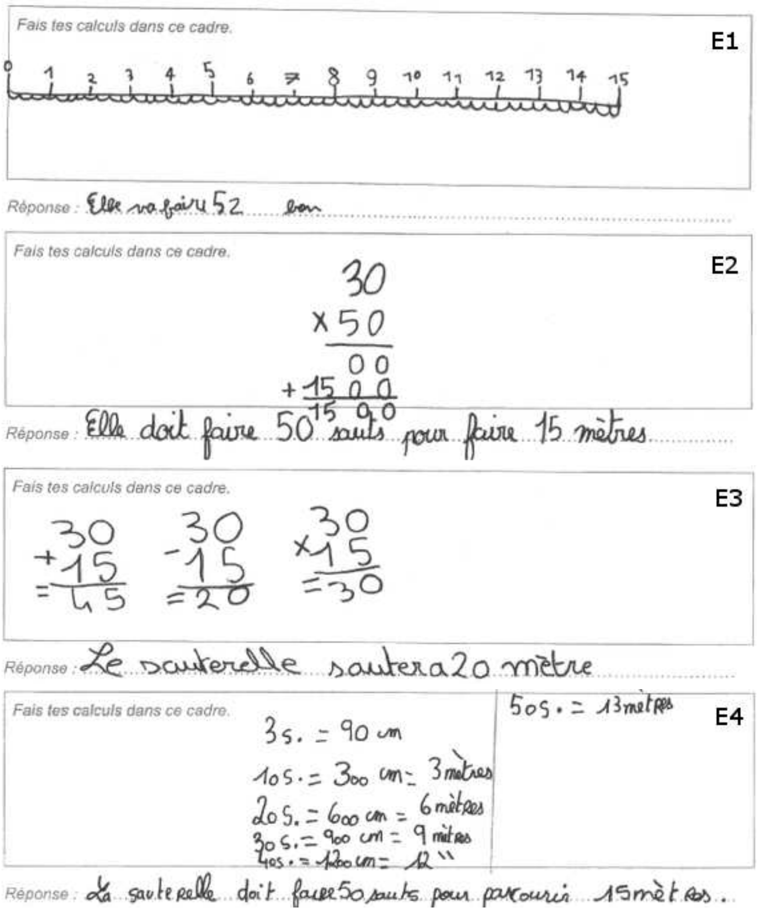
1) Quelle notion mathématique est principalement mise en jeu dans cet exercice ?
2) Donner les principaux paramètres de la situation qui peuvent avoir une influence sur la difficulté de l'exercice.
3) Indiquer trois procédures correctes que peuvent utiliser des élèves de CM2 pour répondre.
4) Observer les réponses des cinq élèves. Relever les erreurs et émettre une hypothèse sur l'origine de chacune.

2 CRPE 2014 Sujet 0

Situation A – Le problème ci-dessous a été donné en évaluation à des élèves de cycle 3.

À chaque saut, une sauterelle avance de 30 cm. Combien de sauts doit-elle faire pour parcourir 15 mètres ?

1) Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?
2) Le problème a été proposé à 4 élèves dont les productions sont données page suivante. Pour chacun des 4 élèves.
  a) Expliquer, en argumentant à partir des traces écrites de l'élève, si la procédure qui semble avoir été utilisée témoigne d'une mise en œuvre correcte des propriétés mathématiques de la proportionnalité.
  b) Émettre une hypothèse sur la cause des erreurs éventuelles.
3) D'un point de vue théorique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire du nombre de sauts.
  a) Expliciter cette fonction.
  b) Donner la réponse attendue en utilisant cette fonction.



Fais tes calculs dans ce cadre. E1

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Réponse : Elle va faire 52 bon

Fais tes calculs dans ce cadre. E2

30
x 50
00
+ 1500
1500

Réponse : Elle doit faire 50 sauts pour faire 15 mètres

Fais tes calculs dans ce cadre. E3

30 + 15 = 45
30 − 15 = 20
30 x 15 = 30

Réponse : Le sauterelle sautera 20 mètre

Fais tes calculs dans ce cadre. E4

3s. = 90 cm
10s. = 300 cm = 3 mètres
20s. = 600 cm = 6 mètres
30s. = 900 cm = 9 mètres
40s. = 1200 cm = 12 "
50s. = 13 mètres

Réponse : La sauterelle doit faire 50 sauts pour parcourir 15 mètres.

Situation B – Le problème ci-dessous a été donné à des élèves à l'entrée en sixième.

6 objets identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 9 de ces objets ?

1) Dans cet énoncé, qu'est-ce qui indique que la situation est une situation de proportionnalité ?

2) D'un point de vue mathématique, qu'est-ce qui différencie cet énoncé du précédent ?

3) Proposer trois méthodes possibles pour résoudre cet exercice en cycle 3, et pour chacune expliciter les propriétés mathématiques utilisées.

Situation C – En classe de CM2, un professeur propose le travail suivant aux élèves.

Un pavé droit a pour base un carré de côté 2 cm. On fait varier sa hauteur et on s'intéresse à son volume.

1) Complète le tableau de valeurs suivant

Hauteur du prisme droit	*2 cm*	*3 cm*	*4 cm*	*5 cm*	*6 cm*	*10 cm*
Volume du prisme droit						

2) Place sur la feuille les six points correspondant aux six colonnes du tableau (le professeur a distribué une feuille de papier quadrillé sur laquelle les deux axes gradués d'un repère orthogonal ont été tracés. Sur l'axe des abscisses il a indiqué : hauteur du pavé droit, et sur celui des ordonnées : volume du pavé droit).

3) Que constates-tu ? vérifie avec ta règle.

1) Citer une nouvelle caractérisation de la proportionnalité mise en évidence dans cet exercice.

2) Dans cet énoncé, c'est la hauteur du pavé droit qui varie. Si le professeur avait choisi de faire varier la longueur du côté du carré de la base, qu'est-ce que cela aurait changé ? Justifier.

Vu au CRPE

3 **CRPE 2014 G2**

Un enseignant traite la proportionnalité avec des élèves de cycle 3.

A. L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [. . .]) reste à préciser :

> *Pour une visite au Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 15 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe. [. . .]*
> *Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?*

1) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.

2) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

B. L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité ci-dessous à partir de celle proposée dans le manuel « Outils pour les maths » - CM1 - Magnard - édition 2011 :

> **On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.**
>
> • *Exemple 1 :* **1 kg de pêches coûte 3 €.**
>
> | *Nombre de kg de pêches* | *1* | *2* | *5* |
> |---|---|---|---|
> | *Prix en €* | *3* | *6* | *15* |
>
> *Le prix est proportionnel à la masse.*
> *Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).*
>
> • *Exemple 2 :* **4 gâteaux coûtent 6 €.**
> *Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double* → $6 \times 2 = 12$ €.
> *Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié* → $6 \div 2 = 3$ €.
>
> • *Exemple 3 :* **1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.**
> *Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas* **3 fois plus cher** *qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.*
> **Cette situation n'est pas proportionnelle.**

1) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?

2) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?

3) Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents. Expliciter ces différents rôles.

4) Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

C. L'enseignant propose un autre exercice :

> *Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs.*
> *Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs.*
> *Combien faudra-t-il dœufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?*

Analyser les quatre productions des élèves page suivante, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.

Auriane	Emeric
Je cherche pour une personne $6 : 8 =$ $\begin{array}{r\|l} 6 & 8 \\ 60 & 0,75 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$ Je cherche pour 20 personnes $20 \times 0,75 =$ $\begin{array}{r} 0,75 \\ \times\ 20 \\ \hline 15,00 \end{array}$ Il faut 15 oeufs	$8 + 12 = 20$ $6 + 9 = 15$ Il faut 15 oeufs
Nicolas	**Kévin**
$8 + 12 = 20$ $6 + 12 = 18$ Il faut 18 oeufs	Pour 8 personnes, il faut 6 oeufs. Donc, pour 1 personne il en faut 8 fois moins pour 20 personnes, 20 fois plus. $6 \times 20 : 8 =$ $\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 20 \\ \hline 120 \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 120 & 8 \\ 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$ Il faut 15 oeufs.

D. L'enseignant propose un dernier exercice :

> *Dans une ville, il y a deux médiathèques.*
> *Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. À cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants :*
> - *à la médiathèque Jean Jaurès, on peut trouver 5 000 ouvrages dont 40 % de romans ;*
> - *à la médiathèque George Sand, on peut trouver 4 000 ouvrages dont 60 % de romans.*
>
> *Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.*

1) Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ? À quel niveau du cycle 3 va-t-on de préférence proposer cet exercice ?

2) Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun. Paul dit : « J'ai trouvé 50 % parce que c'est exactement entre 40 % et 60 % ».

a) Quelle erreur de raisonnement Paul commet-il ?

b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5000 pour que 50 % soit la bonne réponse ? Justifier.

4 CRPE 2016 G2

Un enseignant propose le problème suivant à ses élèves de cycle 3 :

> Nicolas a acheté 2 kg de pommes. Il a payé 4 €.
> Léo a acheté la même variété de pommes dans le même magasin. Il a payé 5 €.
> Quelle masse de pommes a-t-il achetée ?

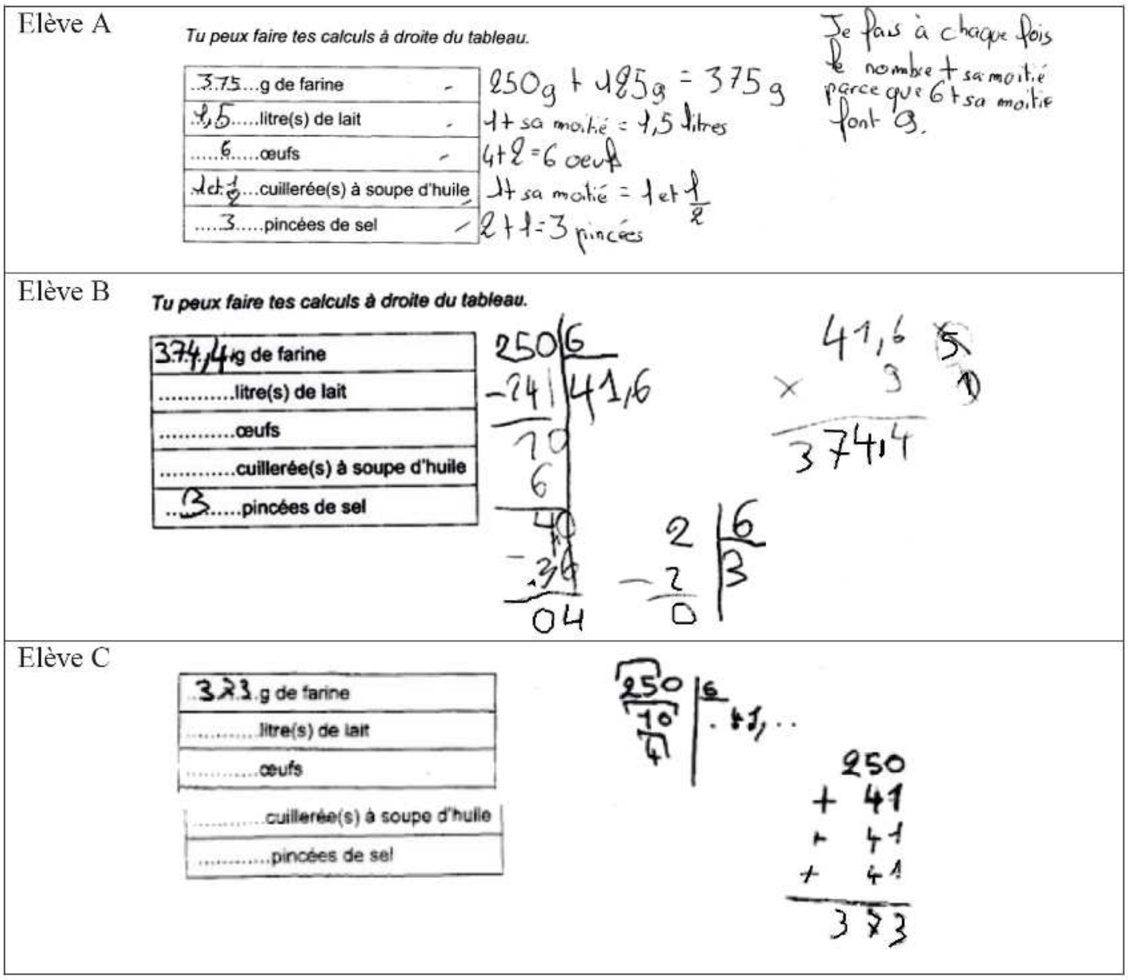
Proposer trois procédures, attendues d' élèves de cycle 3, pour résoudre ce problème, l'une au moins ne nécessitant pas le recours aux nombres décimaux.

5 **CRPE 2017 G1**

L'exercice ci-dessous est extrait des évaluations nationales CM2 de 2008.

> *Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut :*
> - *250 g de farine ;*
> - *1 litre de lait ;*
> - *4 oeufs ;*
> - *1 cuillerée à soupe d'huile ;*
> - *2 pincées de sel.*
>
> *Calcule la quantité de chacun des ingrédients nécessaire pour faire des crêpes pour 9 personnes.*

Voici les productions de trois élèves :



1) Quelle est la principale notion du programme sur laquelle cet exercice permet de revenir ?

2) Expliciter les procédures utilisées pour le calcul de la masse de farine nécessaire par chacun des élèves A, B et C.

3) En quoi le choix de 300 g de farine nécessaires au lieu de 250 g aurait-il pu modifier les procédures proposées par les élèves ?